RIEMANNIANA SELECTA

BERNHARD RIEMANN
Edición y estudio introductorio a cargo de José Ferreirós
Madrid: Consejo Superior de Investigaciones Científicas,
2000. CLVII + 138 pp.
(Colección Clásicos del Pensamiento)

José Ferreirós ha hecho suya la hermosa tarea de estudiar a fondo y darnos a conocer los logros de mayor interés filosófico de la matemática alemana del siglo XIX. Autor de una excelente traducción comentada de los dos grandes ensayos de Dedekind sobre los números reales y los números naturales[1], y un estudio novedoso, detallado y muy iluminador sobre la historia de la teoría de conjuntos[2], ahora nos regala con una edición bilingüe de escritos selectos de Riemann, precedida de un extenso estudio crítico que ayudará muchísimo a entenderlos.

En su corta vida, Bernhard Riemann (1826-1866) hizo contribuciones importantísimas al análisis matemático, inaugurando el enfoque topológico de sus problemas, ampliado y profundizado luego por Poincaré; pero su aporte más conocido y reconocido es el concepto de variedad diferenciable, introducido en su lección inaugural de 1854, "Sobre las hipótesis en que se funda la geometría", con el propósito de ofrecer a la física una noción de espacio más general y más flexible que la pitagórico-euclidiana que utilizaba hasta entonces. Este concepto está en la base de la teoría de la gravitación de Einstein y, por ende, de la cosmología actual, que concibe el universo físico como lo que se llama una variedad diferenciable semirriemanniana de 4 dimensiones, y ocupa asimismo un lugar central en los tratamientos modernos de la mecánica clásica; también en las teorías cuánticas de campos, a través de la teoría de los grupos de Lie, que son grupos –en el sentido algebraico– que poseen además la estructura de variedades diferenciables. El escrito de Riemann "Sobre las hipótesis" forma, con el escolio a las leyes del movimiento de Newton y la estética trascendental de Kant, la tríada que mayor influencia ha ejercido sobre la filosofía del espacio, siendo por otra parte mucho más original que aquél y más preciso, lúcido y agudo que ésta. Ferreirós ha tenido la buena idea de imprimir no solo el texto original (pp. 2-18),

1 Richard Dedekind. *¿Qué son y para qué sirven los números? y otros escritos sobre los fundamentos de la matemática*, edición e introducción a cargo de José Ferreirós. Madrid: Alianza, 1998. Cf. mi reseña en *Revista Latinoamericana de Filosofía.*

2 José Ferreirós. *Labyrinth of Thought: A History of Set Theory and its Role in Modern Mathematics.* Basel: Birkhäuser, 1999.

sino también las valiosísimas "Aclaraciones" de Hermann Weyl, publicadas en 1919, después de la aparición de la citada teoría de Einstein, en cuyo desarrollo Weyl estaba participando activamente. El Estudio Introductorio contiene 25 luminosas páginas (pp. XCII-CXVII) dedicadas a situar históricamente y explicar las ideas geométricas de Riemann. La traducción castellana de Ferreirós, exacta y muy legible, me gusta más, en general, que la que publiqué hace casi un cuarto de siglo[3]; aunque, a riesgo de resultar majadero, señalaré al final dos puntos en que prefiero la mía.

Aparte de la lección inaugural, Ferreirós reproduce y traduce en *Riemanniana selecta* tres escritos matemáticos: (i) un extracto de 20 páginas de la tesis de habilitación de 1854, "Sobre la representabilidad de una función mediante una serie trigonométrica"; (ii) la parte I del artículo de 1857 sobre las funciones abelianas, el cual "lanza a la fama" a su autor, como bien señala Ferreirós (p. CL); y (iii) el artículo de 1859, "Sobre el número de primos menores que una cantidad dada", que extiende a los complejos el dominio de la función ζ –conocida hoy como la función zeta de Riemann– que Euler utilizó en 1737 para probar que la suma de los valores recíprocos de los primos es divergente[4]. El propósito de este artículo es demostrar el llamado Teorema de los Primos (conjeturado por Euler, Legendre y Gauss, y probado finalmente por Hadamard en 1896), conforme al cual, si $\pi(x)$ es el número de los primos no mayores que x, entonces, cuando x crece indefinidamente, la expresión $\pi(x)x^{-1} \log x$ converge al límite 1. Riemann percibió que para lograrlo había que conocer las soluciones de la ecuación $\zeta(z) = 0$ ($z \in \mathbb{C}$), y enunció la célebre Conjetura de Riemann, no demostrada aún pero rica en consecuencias interesantes: si $z = x + iy$ es una de esas soluciones, $x = \frac{1}{2}$. Dada la complicación técnica de estos escritos, impecablemente impresos aquí, se me ocurre que no habría sido imposible incluir también la *Preisschrift* parisina de 1861 donde Riemann aplica su geometría diferencial a un problema de física –la propagación del calor en un cuerpo rígido homogéneo, con preservación de un sistema dado de isotermas– e introduce el tensor de curvatura que hoy lleva su nombre. Lo digo con cierta nostalgia, pues este escrito, redactado por Riemann en latín, me resulta mucho más inaccesible que los aquí traducidos. En todo caso, los intereses físicos de Riemann están bien representados por el anuncio sobre la propagación de ondas planas de amplitud finita de 1859 y, sobre todo, por un largo fragmento de "Filosofía natural" publicado póstumamente en 1876, así como por el §1 de la *Mecánica del oído* de 1866 (aunque el asunto de este parágrafo se incluiría hoy dentro del campo de la biología). En 1876 aparecieron también los fragmentos filosóficos "Antinomias", "Sobre epistemología" ("Erkenntnistheoretisches") y "Sobre psicología, teleología y almas". Completan la colección los "Apuntes sobre el concepto de variedad", un valioso complemento a la elucidación de este concepto en la lección inaugural (redactados probablemente en 1852/53, los publicó Erhard Scholz en 1982).

3 Bernhard Riemann. "Sobre las hipótesis que están en la base de la geometría", traducción de Roberto Torretti, *Diálogos*, 31: 151–168 (1978).

4 Euler observó que, $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_n^s}\right)^{-1}$, donde s recorre los enteros y p_k designa el k-ésimo primo.

Minucias de traducción. Paso a referirme a las traducciones discrepantes a que aludí. La palabra alemana *Grösse*, que figura abundante y decisivamente en "Sobre las hipótesis", Ferreirós la vierte como "magnitud", lo que es admisible y suena muy bien la mayor parte de las veces, pero no deja de desconcertarnos en la frase "magnitudes discretas" (p. 4, líneas 8 y 19): en nuestra lengua castellana, *die diskreten Grössen*, como una docena o un centenar, son *cantidades* –de naranjas, por ejemplo, o de camiones–, no *magnitudes*. Por esta sola razón, preferí traducir *Grösse* como *cantidad* en todo el escrito de Riemann, aunque donde él dice *mehrfach ausgedehnte Grösse* y Ferreirós escribe *magnitud múltiplemente extensa*, me sonó mal poner *cantidad múltiplemente extensa* y escribí *cantidad multidimensional*. Esta traducción no es literal, pero está avalada por la correspondencia entre extensión n-aria y n-dimensionalidad que hace su aparición más adelante (p. 5). En los "Apuntes sobre el concepto de variedad" (p. 93) se caracteriza una *Grösse* como aquello que es capaz de incremento o disminución; este requisito lo cumple, ciertamente, toda *magnitud*, pero es una característica general de las *cantidades*. Por lo demás, el propio Ferreirós me respalda en su traducción del título del trabajo sobre los números primos, "Sobre el número de primos menores que una *cantidad* dada" – "Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse" (p. 79, énfasis mío); aunque, curiosamente, en el Índice, lo titula "Sobre el número de primos menores que una *magnitud* dada" (p. VIII).

En la Sección II, §1, Riemann dice que las determinaciones métricas exigen una independencia de las *Grössen* respecto a la posición (*Ort*), lo cual puede asegurarse de varios modos. El que primero nos viene a la cabeza consiste en que la longitud de las líneas sea independiente de su *Lage*. Ferreirós usa la palabra castellana *posición* para traducir tanto *Ort* como *Lage*. En cambio, a mí me pareció que era aconsejable usar dos palabras distintas y traduje *Lage* como *colocación*. Hay algo en esta traducción que me incomoda, pero sigo pensando que expresa mejor que *posición* lo que Riemann quiere decir con *Lage*. Cuando éste propone postular que la longitud λ de un línea finita situada en el espacio ordinario sea independiente de su *Lage*, no se refiere solamente a que λ ha de permanecer invariante si la línea en cuestión es trasladada de un sitio a otro. Piensa sobre todo en que una misma línea unidimensional puede estar insertada o incrustada en el espacio tridimensional de muchas maneras. Por ejemplo, podemos trazar una línea de longitud λ a lo largo de un hilo de algodón que tenga varios nudos, sueltos o apretados; si luego deshacemos los nudos y estiramos el hilo sobre un plano, nuestra línea toma la forma de un segmento recto; por último, si enrollamos el plano, la línea toma la forma de espiral. El supuesto de que "la longitud de las líneas sea independiente de la *Lage*, o sea que cada línea sea medible por cualquiera otra" (p. 7) prescribe la invariancia de λ a través de todas estas transformaciones, que no me parece desatinado describir como cambios de *colocación*.

ROBERTO TORRETTI
Profesor emérito
Universidad de Puerto Rico